

Matematika Mérnököknek 2.

Baran Ágnes, Burai Pál, Noszály Csaba

Gyakorlat Differenciálegyenletek numerikus megoldása

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Fokozatos közelítés, Euler-módszer

1. feladat

Oldja meg a következő kezdeti érték problémákat, majd fokozatos közelítés módszerével közelítse a megoldást (2 – 4 iteráció)!

- $x' = t + x, \quad x(0) = 1;$
- $x' = \cos(t), \quad x(0) = 1;$
- $x' = \frac{t}{1+x^2}, \quad x(0) = 1;$
- $x' = \sqrt{1 - x^2}, \quad x(0) = 0.$

2. feladat

Számítsa ki Euler módszerrel az előző egyenletek közelítő megoldását a $[0, 1]$ intervallumon $h = 0.25$ lépésközzel! Vesse össze az így kapott értékeket és a fokozatos közelítésből kapott közelítő megoldások helyettesítési értékét az osztópontokban az egzakt megoldások helyettesítési értékével! Mit tapasztal?

Euler-módszer

1. feladat

Írjon egy kódot, amely adott

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték probléma és h lépésköz esetén kiszámítja az y megoldás Euler-módszerrel való közelítését egy $[x_0, b]$ intervallumon.

2. feladat

Az elkészített kód segítségével számítsa ki az

$$y' = 2y + x, \quad y(0) = 1$$

KÉP megoldásának közelítését a $[0, 1]$ intervallumon, $h = 0.25$, $h = 0.2$, $h = 0.1$, $h = 0.01$ esetén. Ábrázolja közös ábrán a KÉP egzakt megoldását és a megadott h értékekhez tartozó közelítő megoldásokat.

3. feladat

Az előző kód segítségével oldja meg numerikusan az

$$y' = -100(y - \sin(x)) + \cos(x), \quad y(0) = 0$$

kezdeti érték problémát a $[0, 1]$ intervallumon különböző lépésközzel. Mit tapasztal?

Minden esetben ábrázolja a numerikus illetve az egzakt megoldást ($y(x) = \sin(x)$) egy ábrán!

4. feladat

Oldja meg az előző egyenletet szimbolikusan Matlabbal, majd végezze el az előző vizsgálatokat az $y(0) = 1$ kezdeti feltétel esetén is!

Taylor-sor módszer

Feladat

Írjon egy kódot, mely az

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(x)$$

közelítést harmadik, illetve negyedik tagig használva számítja az

$$y' = 2x(x^2 + y), \quad y(0) = 0$$

KÉP numerikus megoldását az $[0, 1]$ intervallumon. Rajzoltassa ki közös ábrára az

$$y = -1 - x^2 + e^{x^2}$$

egzakt megoldást, illetve a $h = 0.1$, $h = 0.01$ lépésközhöz tartozó közelítő megoldásokat.

Runge-Kutta módszer

1. feladat

Írjon egy Matlab-kódot, mely adott h esetén az $y'(x) = f(x, y)$, $y(\xi) = \eta$ KÉP megoldását közelíti a

$$x_0 = \xi, \quad y_0 = \eta$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot k_2$$

módszer segítségével a $[\xi, b]$ intervallumon.

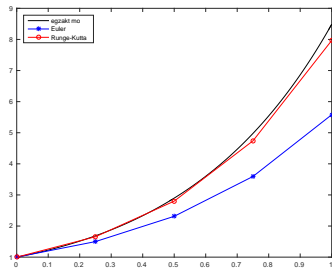
Runge-Kutta módszer

2. feladat

Az előző kód segítségével közelítse az

$$y' = 2y + x, \quad y(0) = 1$$

KÉP megoldását a $[0, 1]$ intervallumon. Használjon különböző h értékeket. Ábrázolja közös ábrán a pontos és a $h = 0.25$ -höz tartozó közelítő megoldást, illetve a korábban az Euler-módszerrel ugyanilyen lépésközhez meghatározott megoldást.



3. feladat

Az előző kód segítségével közelítse az

$$y'(x) = \frac{y}{x} + 10x \cos(10x), \quad y\left(\frac{\pi}{20}\right) = \frac{\pi}{20}$$

KÉP megoldását a $\left[\frac{\pi}{20}, 2\pi\right]$ intervallumon. Használjon különböző h értékeket.

Határozza meg a KÉP explicit megoldását is, ábrázolja közös ábrán a pontos és a közelítő megoldást.

Numerikus megoldás a Matlab ode45 függvényével

Példa

Közelítsük az

$$y' = 2y + x, \quad y(0) = 1$$

KÉP megoldását a $[0, 1]$ intervallumon a Matlab beépített ode45 függvényével.

Megoldás. Az ode45 függvény használata az

$$y' = f(x, y), \quad y(xmin) = y0$$

KÉP megoldásának közelítésére az $[xmin, xmax]$ intervallumon:

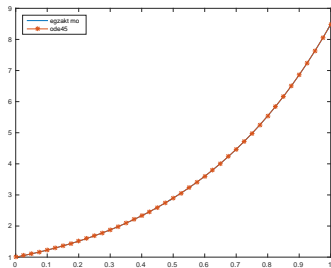
$$[x, y] = \text{ode45}(f, [xmin, xmax], y0)$$

ahol a megoldás $x(i)$ -beli közelítése $y(i)$ -be kerül.

```
>> f=@(x,y) 2*y+x;  
>> [xm,ym]=ode45(f,[0,1],1);
```

Ábrázoljuk közös ábrán az egzakt ($y = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$) és a közelítő megoldást!

```
>> xx=linspace(0,1);  
>> yy=5*exp(2*xx)/4 - xx/2 - 1/4;  
>> figure; plot(xx,yy,xm,ym,'-*')  
>> legend('egzakt mo', 'ode45', 'Location','NorthWest')
```



Magasabbrendű egyenletek az ode45 függvénnyel

Példa

Közelítsük az

$$y'' - 2y' - 3y = 3x^2 + 4x - 5, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

KÉP megoldását a $[0, 2]$ intervallumon az ode45 függvény segítségével!

Megoldás. Írjuk át a másodrendű egyenletet egy egyenletrendszerre:

$$y_1' = y_2, \quad y_1(0) = 1$$

$$y_2' = 2y_2 + 3y_1 + 3x^2 + 4x - 5, \quad y_2(0) = 2$$

Írjunk egy függvényt, mely a két egyenlet jobboldalával tér vissza:

$$f=@(x,y) [y(2); 2*y(2)+3*y(1)+3*x^2+4*x-5];$$

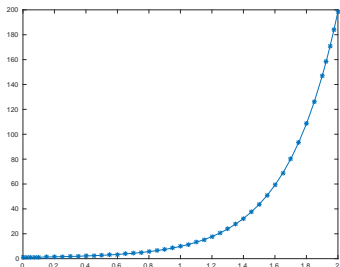
Hívjuk meg az ode45 függvényt:

```
>> [x,y] = ode45(f,[0 2],[1; 2]);
```

Az y mátrix első oszlopában az y_1 , másodikban az y_2 függvény értékei lesznek az x vektorban megadott helyeken.

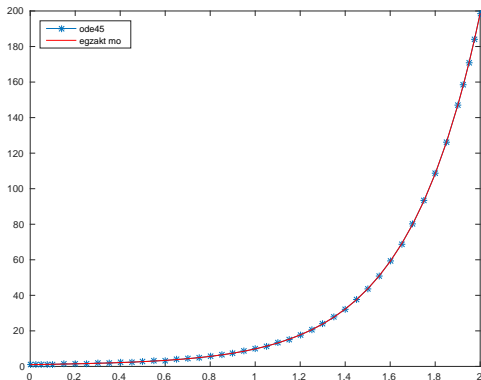
Ábrázoljuk az y_1 -et (az eredeti másodrendű egyenletünk megoldásának közelítését):

```
>> figure; plot(x,y(:,1),'*-')
```



Ábrázoljuk a pontos megoldást ($y = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x} - x^2 + 1$) ugyanezen az ábrán.

```
>> hold on; plot(x,-exp(-x)/2+exp(3*x)/2-x.^2+1,'r')  
>> legend( 'ode45','egzakt mo', 'Location','NorthWest')
```



Magasabbrendű egyenletek numerikus megoldása

1. feladat.

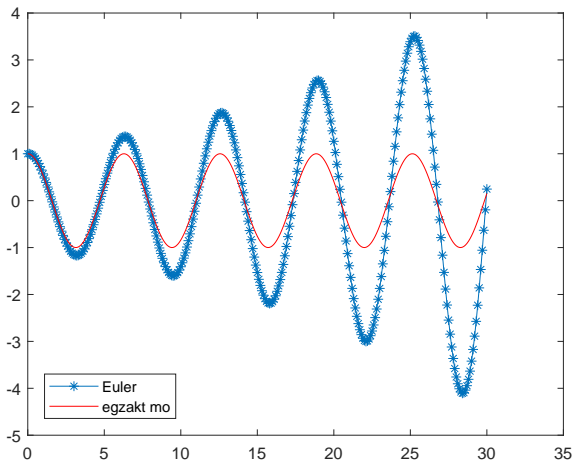
Írjon egy Matlab-kódot, amely az előző másodrendű KÉP megoldását közelíti Euler-módszerrel!

2. feladat.

Az előző Matlab-kód segítségével közelítse a

$$m \cdot x'' = -kx, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0$$

KÉP megoldását (k rugóállandójú rugóra felfüggesztett m tömegű test mozgása). Válassza az $x_0 = 1$, $\frac{k}{m} = 1$, $h = 0.1$ értékeket. Ábrázolja közös ábrán a közelítő megoldást és a KÉP pontos megoldását ($x = x_0 \cos(t \cdot \frac{k}{m})$) a $[0, 30]$ intervallum fölött.



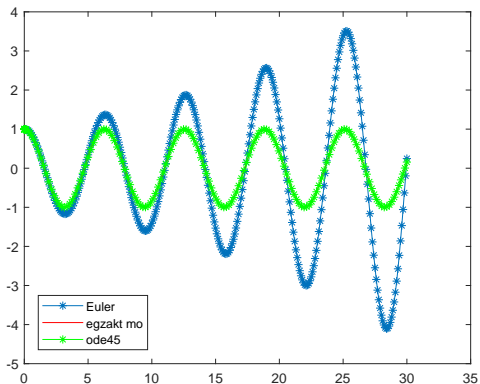
Az

$$m \cdot x'' = -kx, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0$$

KÉP megoldása $x_0 = 1$, $\frac{k}{m} = 1$, $h = 0.1$ esetén.

3. feladat

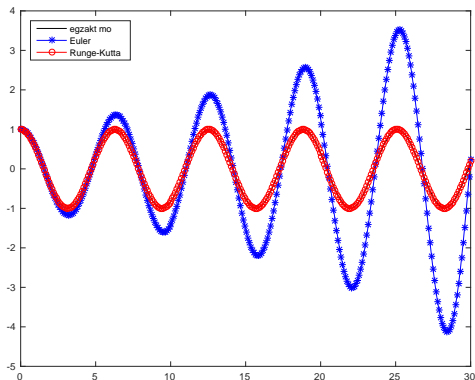
Közelítse az előző KÉP megoldását a Matlab ode45 függvényével is.



Magasabbrendű egyenletek numerikus megoldása

4. feladat

Közelítse az előző KÉP megoldását a másodrendű Runge-Kutta módszerrel.



Magasabbrendű egyenletek numerikus megoldása

5. feladat

Közelítse Euler-módszerrel és másodrendű Runge-Kutta módszerrel az

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = -4$$

megoldását a $[0, 30]$ intervallumon. Hasonlítsa össze az eredményeket az egzakt megoldással! ($y = \cos(x) + \sin(x) + x \cos(x) + x \sin(x)$)

